**2018年高考全国Ⅰ卷理科数学第21题的若干思考**

黄顺进¹ 黄耿跃²

1福建省南安国光中学（362321） 2福建省厦门实验中学（361000）

**一、试题呈现**

（2018年高考全国Ⅰ卷理科数学第21）已知函数

（Ⅰ）讨论的单调性；

（Ⅱ）若存在两个极值点，证明：

**二、初步分析**

题目所给的函数是由反比函数、正比例函数、对数函数三个基本初等函数通过四则运算组合而成，给考生的感觉是题干简洁，看了就会想往下做，具有一定的亲和力．第一问讨论函数的单调性，中等生基本能拿到分数，第二问证明不等式，对考生的思维能力、运算能力等要求较高，且要懂得利用第（1）问的结论，敢于代入不等式的左边进行化简，才能顺利求证不等式．

**三、第（**Ⅱ**）问错误解法的思考**

试题第（Ⅱ）问引入了双元，进而证明一个斜率型的不等式，很多学生由于思维定势，把“存在”看成对“任意的”，从而产生如下的想法：

不妨设，则， 所以等价于．

构造函数，则函数在单调递增．

事实上，这样的问题等价是错误的．理由就是把存在性问题，看成任意性问题，且没有注意到与还是互相关联的，导致产生错误的解法．

**四、试题第（**Ⅱ**）问多种解法的思考**

**解法一：构造关于或的函数**

由第（Ⅰ）问知，存在两个极值点当且仅当．

由于的两个极值点满足，所以．不妨设，则．由于



所以等价于

设函数，由（1）知，在单调递减，又，从而当时，．所以，即．

**评注：本法为参考答案的解法，属于常规解法．若把用替换也可构造出另一个新函数进行证明，本质是一样的．**

**解法二：构造关于的函数**

由第（Ⅰ）问知，存在两个极值点，当且仅当,且两个极值点分别为和，则有，．

同前述恒等变形可知，等价于，

且等价于．

令．

当时，，所以在递减，

又当时，，

所以当时，，即,从而，原不等式得证．

**评注：由第（**Ⅰ**）问有可知三者是存在一定的内在联系的，是互相牵制的，只要选定其中一个为变量，就可构造出新函数，于是也可以构造出关于的函数，但中间要利用到洛比达法则或极限的思想进行说明．**

**解法三：利用函数的单调性**

由第（Ⅰ）问知，存在两个极值点，当且仅当．

由于两个极值点满足，所以，

不妨设，则．

由于等价于，

且等价于,

令,

则原不等式．

令，则．

故欲证明原不等式成立，只需证明：当时，．

以下先证明：当时，．

记，

由，知在单调递减，

故当时，,即当时，．

所以当时，

．

从而，原不等式得证．

**评注：在构造新函数前，必须把参数消去，如果所构造的函数含有参数将使求解陷入死胡同，难以为继．**

**解法四：利用整体换元构造函数**

由第（Ⅰ）问知，存在两个极值点，当且仅当．

由于两个极值点满足，所以，

不妨设，则．

同前述恒等变形，知等价于，

且等价于．

令，则，以下略．

**评注：利用等式，把不等式转化为关于的齐次式，再通过整体换元使问题求解．**

**五、试题题源的思考**

很多老师看到全国1卷的这道函数与导数试题，第一时间就想到2011年湖南文科第21题：设函数（1）讨论的单调性；（2）若有两个极值点和，记过点的直线的斜率为，问：是否存在，使得若存在，求出的值，若不存在，请说明理由．

笔者以为，不能因为找到了高考题的题源，就认为高考出这种题目水平太低了，而是要深入地去反思？为什么高考敢这样考？笔者认为，这种题目是经典题，它蕴含着很多数学的思想方法，是可以区分不同思维层次的考生，所以高考敢于用推陈出新命题手法命制试题，这应该引起一线教学的重视．

**六、对函数与导数中双元问题的复习思考**

17世纪，数学的发展突飞猛进，实现了从常量数学到变量数学的转折．变量数学又经历了单变量到多变量的发展变化．应该说中学阶段在研究变量问题时，更主要的还是以单变量问题为主．所以，这就给了我们求解双变量问题的启发，即：想方法设法把双元问题通过换元或其它方法，转化成单变量问题，才能进行问题求解．事实上，本文提供的四种方法的本质都是转化成构造单变量函数问题．